Ejercicio 51 de los propuestos en el libro de Merino y Santos, Algebra lineal. Los vectores e_1, e_2, e_3 y x vienen dados por sus coordenadas en cierta base. Comprobar que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base y hallar las coordenadas del vector x en dicha base.

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (2, 1, -3) \\ e_2 = (3, 2, -5) \\ e_3 = (1, -1, 1) \end{array}\right\} \quad x = (6, 2, -7)$$

Dar también la matriz del cambio de base.

Como las coordenadas de estos vectores tienen 3 componente, sabemos que la dimensión del espacio vectorial es 3, luego los tres vectores $\{e_1, e_2, e_3\}$ formarán una base si y sólo si son linealmente independientes.

Construimos la matriz cuyas filas (o columnas) son las coordenadas de tales vectores y calculamos su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 5 + 9 + 6 - 3 - 10 = 1 \neq 0$$

Por tanto, el rango de A es 3 y los tres vectores forman una base del espacio vectorial.

Para calcular las coordenadas de x en la base anterior, escribimos x como una combinación lineal de los tres vectores, igualamos coordenada a coordenada y resolvemos el sistema resultante:

$$(6, 2, -7) = x_1\,(2, 1, -3) + x_2\,(3, 2, -5) + x_3\,(1, -1, 1) = (2x_1 + 3x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ -3x_1 - 5x_2 + x_3)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = -7 \end{array}\right\}$$

Ahora basta con resolver el sistema por alguno de los métodos estudiados, por ejemplo usando la forma normal de Hermite de la matriz ampliada:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}\right\}$$

Las coordenadas de x en la nueva base son (1, 1, 1).

La matriz del cambio de base P se obtiene como la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base B, es decir:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base contraria será la inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$